

强震作用下变截面超高桥墩竖向时滞分析的传递矩阵法

程麦理, 李青宁, 孙建鹏, 尹俊红, 闫磊

(西安建筑科技大学 土木工程学院, 陕西 西安, 710055)

摘要: 为探讨变截面超高桥墩竖向时滞效应, 根据经典梁理论, 构造典型杆件单元状态向量的传递关系, 利用达朗贝尔原理, 推导集中质量模型节点状态向量的递推公式, 建立等效阶形变截面单元的传递矩阵法。结合结构在时域内振动波动传播的离散时间序列性, 推导建立变截面单元状态向量在离散时间序列的传递关系, 提出研究变截面超高桥墩竖向时滞效应分析的传递矩阵法。研究表明: 采用传递矩阵法计算的变截面超高扁桥墩地震响应结果与有限差分法计算结果基本吻合; 对比桥墩中点及桥墩顶节的起振时刻, 得到该两点振动时滞为 0.07 s, 表明传递矩阵法能够有效计算分析变截面超高桥墩在强震作用下的竖向时滞。传递矩阵法计算结果正确、算法可行, 可用于指导变截面超高桥墩结构的动力分析和设计。

关键词: 强震作用; 变截面单元; 状态向量; 传递矩阵法; 离散时间序列; 时滞效应

中图分类号: TU997

文献标志码: A

文章编号: 1672-7207(2017)03-0787-07

Vertical time lag effect analysis of variable cross-section high piers under strong earthquake excitation

CHENG Maili, LI Qingning, SUN Jianpeng, YIN Junhong, YAN Lei

(School of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: In order to investigate vertical time-lag effect on variable cross-section high bridge pier, typical member unit state vector's transitive relation was constructed according to classical beam theory. According to d'Alembert's principle, node state vector's recurrence formula of the lumped mass model was derived. Equivalent stepped variable cross-section unit's transfer matrix method is proposed. Considering structure seismic propagation's discrete time sequence in time domain, variable cross-section unit state vector's transitive relation in discrete time sequence was constructed. Transfer matrix method to investigate vertical time-lag effect on variable cross-section high bridge pier was proposed. The results show that seismic response of variable cross-section high plat bridge pier calculated by the transfer matrix method is closely related to the finite difference method; comparing vibration beginning time of middle position of the pier and top position of the pier, time lag is calculated to be 0.07 s, and the transfer matrix method is verified to be useful in analyzing vertical time-lag effect on variable cross-section high bridge pier in strong earthquake. Calculated results by the transfer matrix method are correct and this method is viable.

Key words: strong earthquake excitation; variable cross-section element; state vector; transfer matrix method; discrete time series; time-lag effect

收稿日期: 2016-04-07; 修回日期: 2016-06-10

基金项目(Foundation item): 国家自然科学基金资助项目(51078306, 51408453); 陕西省自然科学基金研究计划项目(2013JQ7007) (Projects(51078306, 51408453) supported by the National Natural Science Foundation of China; Project(2013JQ7007) supported by the Natural Science Basic Research Plan in Shaanxi Province of China)

通信作者: 程麦理, 博士, 讲师, 从事桥梁结构抗震研究; E-mail: cml3635@163.com

由于变截面构件在根部能够承受较大弯矩荷载,且使得建筑跨度和高度有大幅度提升,因而在工程建设中得到广泛应用,如:高耸的烟囱、水平长悬臂结构和超高桥墩等。在强震作用下结构的动力反应是一种波动^[1],这主要是因为动载作用处产生的振动不能立刻影响到其他部位,结构的振动传播需要一定时间,对于高柔的悬臂结构往往表现的更加明显。在地势起伏较大的山区,为了交通运输方便,需建立存在较大墩高差的桥梁。当对该类桥梁进行地震动分析时,由于桥墩高度差异引起桥梁主梁接收的振动激励在时域内不一致,这将导致主梁结构动力反应的空间化和桥梁结构整体振动模式的复杂化,给桥梁结构的地震响应分析带来困难。为研究变截面超高桥墩地震动响应的时滞效应,通过建立阶形变截面单元,结合离散时间序列的传递矩阵法对超高桥墩进行动力响应分析,探讨变截面超高桥墩的竖向时滞效应。对于变截面杆件,张元海等^[2]对变截面杆件振动时的应力计算及应力分布规律进行了研究;侯祥林等^[3]探讨了变截面受压杆的承压临界荷载问题。为探讨建筑结构竖向波动时延性,文献[4-6]基于波动理论,对建筑结构进行了波动振动研究,并定量的分析了地震波动激励对结构振动的损伤,由于其采用的方法多是仅考虑一维地震波作用下结构剪切变形的损伤,这与实际结构空间波动振动有较大差别,因而该理论的应用范围很受限。李东升等^[7]针对高耸结构研究了地震荷载的竖向延迟性。刘铁林等^[8-9]根据杆件位移和内力协调关系,建立了结构分析的被研究块体法,探讨了框架高耸结构的波动特性。结构动力分析中常用的数值积分方法能够较好地考虑时间增量和结构波动振动传播的相关性,结合结构构件的空间性,提出离散时间序列的传递矩阵法对结构进行波动传播分析。对于传递矩阵算法,孙建鹏等^[10-11]将传递矩阵法与指数矩阵精细积分法结合,建立精细传递矩阵法研究了频域内结构的地震反应问题和压弯杆件的屈曲计算。韦成龙等^[12]利用传递矩阵法对变截面连续箱梁桥的剪力滞及剪切变形效应进行了研究。芮筱亭等^[13-14]根据舰炮系统的工作原理和机构运动规律,创立线性多体系统传递矩阵法及离散时间传递矩阵法,取得重大研究成果。本文作者根据经典梁理论及变截面构件变形协调特征,建立了变截面单元。引入质心偏移概念,解决了由于截面变化导致的质心与杆件单元几何中心不重合问题。根据结构在动力分析中结构的时间和空间序列性,建立了变截面单元动力响应分析的空间传递矩阵计算方法。根据结构时程分析计算方法,给出变截面单元动力分析传递矩阵法的计算流程图。通过研制变截面

单元波动分析传递矩阵法的 Matlab 程序,对某超高变截面扁桥墩进行时程分析,探究了变截面超高扁桥墩结构振动的时滞性,并将计算结果与有限差分法计算结果对比。

1 变截面单元传递矩阵建立

根据经典梁理论,考虑构件截面尺寸变化对杆件特性的影响,计入杆件质量对结构动力响应的贡献,引入质量偏心概念。将变截面杆件做离散化分析,通过对杆件上下段的杆件等效特性计算,建立动力分析的变截面单元,计算简图如图 1 所示。图中: h_i 和 h_p 分别为单元在 $i \sim i+1$ 和 $i+1 \sim i+2$ 段的长度; I_i 和 I_p 分别为单元在 $i \sim i+1$ 和 $i+1 \sim i+2$ 段的等效惯性矩; A_i 和 A_p 分别为单元在 $i \sim i+1$ 和 $i+1 \sim i+2$ 段的等效面积; m_{i+1} 为单元的总质量。

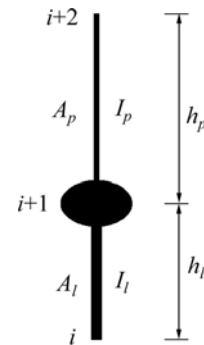


图 1 变截面杆单元

Fig. 1 Variable cross-section bar element

为便于分析截面尺寸变化对杆件特性影响,将单元的总质量放置于单元的质心处。由于单元截面变化使得质心位置与单元几何中心偏移,质心距单元 i 节点距离为 h_i ,距 $i+2$ 节点距离为 h_p ,质心处节点编号为 $i+1$ 。为便于处理,将该典型单元分为 3 个部件,即上部杆件、中部质点和下部杆件。

1.1 杆件状态向量递推关系

图 2 所示为梁单元杆端力与位移的分析简图。根据经典梁理论^[15],建立杆端力与位移的关系表达式:

$$N_{i+1} = N_i = \frac{EA_i}{h_i}(w_i - w_{i+1}) \quad (1)$$

$$V_{i+1} = V_i = \left(\frac{12EI_i}{h_i^3} \frac{1}{1+2\alpha_i} - \frac{6N_i}{5\alpha_i} \right) (u_{i+1} - u_i) - \left(\frac{6EI_i}{h_i^2} \frac{1}{1+2\alpha_i} - \frac{N_i}{10} \right) (\theta_i + \theta_{i+1}) \quad (2)$$

$$M_i = \left(\frac{6EI_l}{h_l^2} \frac{1}{1+2\alpha_l} - \frac{N_l}{10} \right) (u_{i+1} - u_i) - \left(\frac{4EI_l}{h_l} \frac{1+0.5\alpha_l}{1+2\alpha_l} - \frac{2N_l h_l}{15} \right) \theta_i - \left(\frac{2EI_l}{h_l} \frac{1-\alpha_l}{1+2\alpha_l} + \frac{N_l h_l}{30} \right) \theta_{i+1} \quad (3)$$

$$M_{i+1} = \left(-\frac{6EI_l}{h_l^2} \frac{1}{1+2\alpha_l} + \frac{N_l}{10} \right) (u_{i+1} - u_i) + \left(\frac{2EI_l}{h_l} \frac{1-\alpha_l}{1+2\alpha_l} + \frac{N_l h_l}{30} \right) \theta_i + \left(\frac{4EI_l}{h_l} \frac{1+0.5\alpha_l}{1+2\alpha_l} - \frac{2N_l h_l}{15} \right) \theta_{i+1} \quad (4)$$

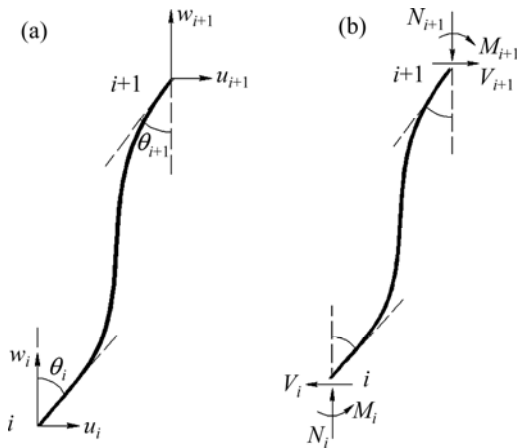
式中: I_l 为杆件等效抗弯惯性矩; h_l 为杆件长度;

$\alpha_l = \frac{6EI_l}{h_l^2 k' GA_l}$, 为杆件的剪切修正系数, E 和 G 分别为

杆件材料的弹性模量和剪切模量, k' 为截面形状系数, A_l 为截面等效面积; N 为杆件轴力, $N_i = N_l$; V 和 M 分别为杆件端部的剪力和弯矩; w , u 和 θ 分别为杆件的轴向位移、横向位移和截面转角; 下角标 i 和 $i+1$ 分别为杆件上下端的编号。令 $\frac{12EI_l}{h_l^3} \frac{1}{1+2\alpha_l} - \frac{6N_l}{5\alpha_l} = T_1^l$,

$$\frac{6EI_l}{h_l^2} \frac{1}{1+2\alpha_l} - \frac{N_l}{10} = T_1^l, \quad \frac{4EI_l}{h_l} \frac{1+0.5\alpha_l}{1+2\alpha_l} - \frac{2N_l h_l}{15} = T_3^l,$$

$$\frac{2EI_l}{h_l} \frac{1-\alpha_l}{1+2\alpha_l} + \frac{N_l h_l}{30} = T_4^l.$$



(a) 变形分析; (b) 内力分析

图2 杆件内力和变形分析

Fig. 2 Member forces and deformation analysis

考虑杆件弯曲变形和剪切变形, 距杆件 i 端 z 处的横向位移公式为

$$u_i(z) = -\frac{M_i}{EI_l} \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} \frac{V_i}{EI_l} + \left(\theta_i - \frac{V_i}{k'GA_l} \right) z + u_i \quad (5)$$

根据式(1)~(5), 推导给出杆件位移、内力的迭代

表达式为:

$$w_{i+1} = w_i - \frac{N_i h_l}{EA_l} \quad (6)$$

$$u_{i+1} = -\frac{h_l^2}{2} \frac{M_i}{EI_l} + \frac{h_l^3 V_i}{6EI_l} (\alpha_l - 1) + h_l \theta_i + u_i \quad (7)$$

$$\theta_{i+1} = \frac{T_1^l M_i}{\left[(T_2^l)^2 + T_1^l T_4^l \right]} - \frac{T_2^l V_i}{\left[(T_2^l)^2 + T_1^l T_4^l \right]} - \frac{\left((T_2^l)^2 - T_1^l T_3^l \right) \theta_i}{\left[(T_2^l)^2 + T_1^l T_4^l \right]} \quad (8)$$

$$N_{i+1} = N_i \quad (9)$$

$$V_{i+1} = V_i \quad (10)$$

$$M_{i+1} = \frac{T_2^l \cdot h_l^2 (T_4^l - T_3^l) - 2EI_l \cdot T_3^l}{2EI_l \cdot T_4^l} M_i + \frac{T_2^l h_l^3 (\alpha_l - 1)}{6EI_l \cdot T_4^l} (T_3^l - T_4^l) V_i + \frac{(T_4^l)^2 + (T_3^l)^2 - T_2^l h_l (T_4^l + T_3^l)}{T_4^l} \theta_i \quad (11)$$

结合式(6)~(11), 杆件内力和杆端位移可表示为矩阵形式

$$\mathbf{Q}_{i+1} = \mathbf{C}_i \mathbf{Q}_i \quad (12)$$

式中: $\mathbf{Q}_i = (w, u, \theta, N, V, M)_i^{-1}$ 为杆件状态向量; \mathbf{C}_i 为杆件状态向量由 i 端到 $i+1$ 端的场传递矩阵, 各元素可根据式(6)~(11)推导得到,

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & c_{77} \end{bmatrix}.$$

1.2 集中质量点动平衡分析

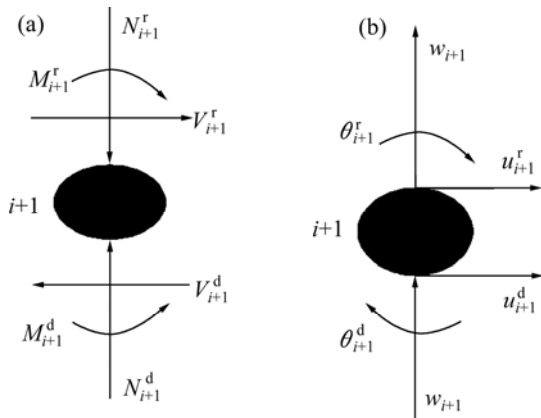
结构的振动是结构惯性力与外荷载相互作用的外在表现。根据 d'Alembert 原理^[16]对结构质点模型进行动力平衡分析, 图3所示为质点动力分析简图。

对变截面单元结构进行动力分析时应考虑结构质量惯性力的作用。根据节点 $i+1$ 处位移连续、动力平衡条件, 得以下关系式

$$w_{i+1}^r = w_{i+1}^d \quad (13)$$

$$u_{i+1}^r = u_{i+1}^d \quad (14)$$

$$\theta_{i+1}^r = \theta_{i+1}^d \quad (15)$$



(a) 内力分析; (b) 位移分析

图 3 质点动力分析

Fig. 3 Dynamic analysis of particle

$$N_{i+1}^r = N_{i+1}^d - m_{i+1}g - m_{i+1}\ddot{w}_{i+1} \quad (16)$$

$$V_{i+1}^r = V_{i+1}^d - m_{i+1}\dot{w}_{i+1} \quad (17)$$

$$M_{i+1}^r = M_{i+1}^d \quad (18)$$

式中: 角标 r 和 d 分别表示质量节点上部和下部。

表达式(13)~(18)可用矩阵表示为

$$\mathbf{Q}_{i+1}^r = \bar{\mathbf{C}}_{i+1}\mathbf{Q}_{i+1}^d \quad (19)$$

式中: \mathbf{Q}_{i+1}^r 和 \mathbf{Q}_{i+1}^d 分别为 $i+1$ 质点处的上、下截面的状态列向量; $\bar{\mathbf{C}}_{i+1}$ 为质点处的点传递矩阵。

1.3 变截面单元传递矩阵

图 4 所示为变截面单元分析简图。根据杆件场传递矩阵和质量集中处的点传递矩阵可知, 对于整个变截面单元, 杆件状态向量的传递矩阵可表示为

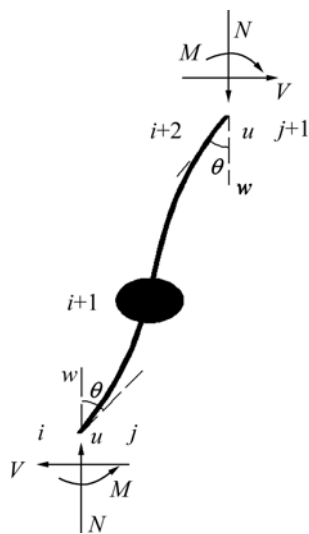


图 4 变截面单元分析简图

Fig. 4 Analysis program of variable cross-section element

$$\mathbf{Q}_{i+2} = \mathbf{C}_{i+1}\bar{\mathbf{C}}_{i+1}\mathbf{C}_i\mathbf{Q}_i = \mathbf{F}_i\mathbf{Q}_i \quad (20)$$

式中: \mathbf{F}_i 为变截面单元总传递矩阵。

在工程实践中, 变截面桥墩主要承受弯曲和剪切作用, 轴力对杆件变形的影响较小, 可不予考虑。当略去杆件轴力影响, 根据式(2)~(4)杆件内力与杆端位移的关系, 杆件点传递矩阵为

$$\bar{\mathbf{C}}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & m_{i+1}\ddot{u}_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

场传递矩阵为

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & h_l & \frac{h_l^3}{6EI_l}(\alpha_l - 1) & -\frac{h_l^2}{2EI_l} & 0 \\ 0 & \frac{1+2\alpha_l}{5-2\alpha_l} & -\frac{h_l^2(1+2\alpha_l)}{2EI_l(5-2\alpha_l)} & \frac{h_l(1+2\alpha_l)}{EI_l(5-2\alpha_l)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4EI_l(2+\alpha_l)}{h_l(1+2\alpha_l)} & -\frac{1.5\alpha_l h_l}{1+2\alpha_l} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据变截面单元的组成, 单元 $i+1 \sim i+2$ 段的剪切修正系数为 α_p , 高度为 h_p , 抗弯惯性矩 I_p , 结合场传递矩阵和点传递矩阵, 建立总传递矩阵

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{C}_{i+1}\bar{\mathbf{C}}_{i+1}\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} \end{bmatrix} \quad (21)$$

根据矩阵运算规则, 推导单元总传递矩阵 \mathbf{F}_i 各元素,

$$f_{11} = 1; \quad f_{12} = h_l - \frac{h_p(1+2\alpha_l)}{(5-2\alpha_l)} + \frac{2h_p^2 I_l(2+\alpha_l)}{h_l I_p(1+2\alpha_l)};$$

$$f_{13} = \frac{h_l^3}{6EI_l}(\alpha_l - 1) + \frac{h_p^3}{6EI_p}(\alpha_p - 1) - \frac{h_l^2 h_p(1+2\alpha_l)}{2EI_l(5-2\alpha_l)} + \frac{h_p^2 h_l 1.5\alpha_l}{2EI_p(1+2\alpha_l)};$$

$$f_{14} = -\frac{1}{2E} \left(\frac{h_l^2}{I_l} + \frac{h_p^2}{I_p} \right) + \frac{h_l h_p(1+2\alpha_l)}{EI_l(5-2\alpha_l)};$$

$$f_{15} = m_{i+1}\ddot{u}_{i+1} \frac{h_p^3(\alpha_p - 1)}{6EI_p};$$

$$f_{21} = 0;$$

$$f_{22} = \frac{(1+2\alpha_p)(1+2\alpha_l)}{(5-2\alpha_p)(5-2\alpha_l)} - \frac{4I_l h_p}{I_p h_l} \frac{(1+2\alpha_p)(2+\alpha_l)}{(1+2\alpha_l)(5-2\alpha_p)};$$

$$f_{23} = \frac{h_l^2}{2EI_l} \frac{(1+2\alpha_l)(1+2\alpha_p)}{(5-2\alpha_l)(5-2\alpha_p)} - \frac{h_p}{EI_p} \frac{(1+2\alpha_p)}{(5-2\alpha_p)} \left(\frac{1.5h_l\alpha_l}{1+2\alpha_l} + \frac{h_p}{2} \right);$$

$$f_{24} = \frac{h_p}{EI_p} \frac{(1+2\alpha_p)}{(5-2\alpha_p)} - \frac{h_l}{EI_l} \frac{(1+2\alpha_p)(1+2\alpha_l)}{(5-2\alpha_l)(5-2\alpha_p)};$$

$$f_{25} = -\frac{m_{i+1}\ddot{u}_{i+1}h_p^2}{2EI_p} \frac{(1+2\alpha_p)}{(5-2\alpha_p)};$$

$$f_{31} = f_{32} = f_{34} = 0; \quad f_{33} = 1; \quad f_{35} = m_{i+1}\ddot{u}_{i+1};$$

$$f_{41} = 0;$$

$$f_{42} = \frac{4EI_p}{h_p} \frac{(2+\alpha_p)(1+2\alpha_l)}{(1+2\alpha_p)(5-2\alpha_l)} - \frac{4EI_l}{h_l} \frac{(2+\alpha_l)}{(1+2\alpha_l)};$$

$$f_{43} = \frac{2I_p h_l^2}{I_l h_p} \frac{(2+\alpha_p)(1+2\alpha_l)}{(1+2\alpha_p)(5-2\alpha_l)} - \frac{1.5h_l\alpha_l}{1+2\alpha_l} - \frac{1.5h_p\alpha_p}{1+2\alpha_p};$$

$$f_{44} = 1 - \frac{4I_p h_l}{I_l h_p} \frac{(2+\alpha_p)(1+2\alpha_l)}{(1+2\alpha_p)(5-2\alpha_l)};$$

$$f_{45} = -m_{i+1}\ddot{u}_{i+1} \frac{1.5h_p\alpha_p}{1+2\alpha_p};$$

$$f_{51} = f_{52} = f_{53} = f_{54} = 0; \quad f_{55} = 1。$$

2 离散时间序列的参量传递

对杆件进行动力分析时, 引入时间参量。取时间积分步长为 Δt , 对用速度、加速度表示的 $i+1$ 节点处的位移进行泰勒级数展开, 并对其截断可表示为

$$u_{i+1,t} = u_{i+1,t-\Delta t} + \Delta t \dot{u}_{i+1,t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{4} (\ddot{u}_{i+1,t-\Delta t} + \ddot{u}_{i+1,t}) \quad (22)$$

对式(22)中 $i+1$ 节点的位移对时间微分得到恒定速度

$$\dot{u}_{i+1,t} = \dot{u}_{i+1,t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{i+1,t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{i+1,t} \quad (23)$$

由式(22)变换给出变截面单元总传递矩阵 F_i 的参量元素 \ddot{u}_{i+1} 的表达式

$$\ddot{u}_{i+1,t} = \frac{u_{i+1,t} - u_{i+1,t-\Delta t} - \Delta t \dot{u}_{i+1,t-\Delta t}}{4} \Delta t^2 - \ddot{u}_{i+1,t-\Delta t} \quad (24)$$

据式(7)可得 $i+1$ 节点含时间序列的位移表达式为

$$u_{i+1,t} = -\frac{h_l^2}{2} \frac{M_{i,t}}{EI_l} + \frac{h_l^3}{6EI_l} V_{i,t} (\alpha_l - 1) + h_l \theta_{i,t} + u_{i,t}, \text{ 即 } t \text{ 时刻}$$

$i+1$ 节点的加速度可用 $t-\Delta t$ 时刻 $i+1$ 节点的位移、速度和加速度及 t 时刻 i 节点的内力和位移表示。由于该传递算法具有状态向量的方向性和时间参量的序列性, 因而能够实现结构动力分析的传递计算。为便于实现整体单元的状态向量的表达, 记 $u_{i+1} = u'_i$ 。

根据图4右侧 j 系列编号, 变截面单元整体传递关系可用传递矩阵表示为

$$Q_{j+1} = F_j Q_j \quad (25)$$

式中, 单元传递矩阵 F_j 可通过式(21)求得。式(25)即为变截面单元动力分析时单元状态向量的传递矩阵计算公式。

3 边界条件

边界条件是结构求解的基础。在离散时间序列中, 结构波动振动进行求解时, 既定的边界与时间序列无关, 即不随时间变化。在利用传递矩阵法求解结构状态向量各参量时, 其实质是对含边界条件方程组的求解。用 \bar{u} 表示已知位移荷载。

悬臂结构杆件, 边界条件为

$$\begin{cases} \theta_1 = 0; u_1 = \bar{u} \\ M_n = 0; V_n = 0 \end{cases} \quad (26)$$

当一端固定, 另一端铰支时, 边界条件为

$$\begin{cases} \theta_1 = 0; u_1 = \bar{u} \\ u_n = 0; M_n = 0 \end{cases} \quad (27)$$

当两端铰支杆件时, 边界条件为

$$\begin{cases} M_1 = 0; u_1 = \bar{u} \\ u_n = 0; M_n = 0 \end{cases} \quad (28)$$

当两端固定时, 边界条件为

$$\begin{cases} \theta_1 = 0; u_1 = \bar{u} \\ u_n = 0; \theta_n = 0 \end{cases} \quad (29)$$

4 结构动力计算流程

本文建立的变截面单元传递矩阵算法考虑了结构动力特性, 通过引入质量中心偏移的位置, 使得在计算中需要对质量中心点的位移、速度和加速度求解,

从而保证单元计算的可靠性和正确性。由于结构波动分析存在时间和空间的序列性，因而结构的动力响应分析能够依据传递算法完成。

根据本文理论，将变截面单元的传递计算方法整理，建立图 5 所示的计算流程图。

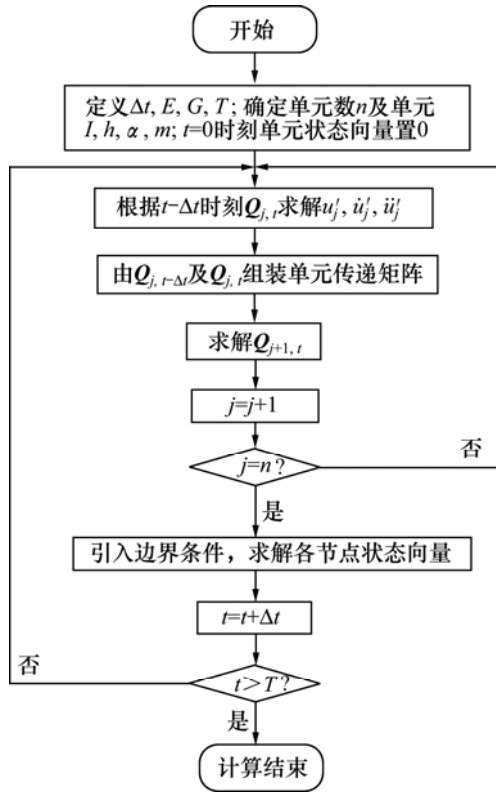
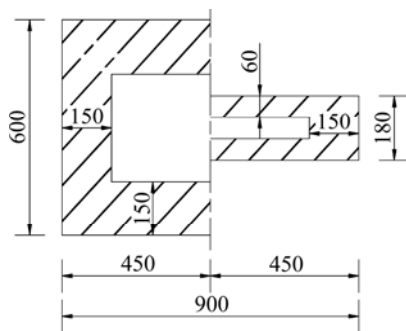


图 5 动力计算流程图

Fig. 5 Flow chart of dynamic calculation

5 算例

某单向变截面超高钢筋混凝土扁桥墩，采用 C50 混凝土，密度 2 500 kg/m³，墩高 100 m，截面形状为矩形，截面尺寸按线性变化，桥墩每隔 20 m 设置厚为 1.5 m 的横隔板。图 6 所示为结构横截面尺寸。在该变



单位: cm

图 6 变截面桥墩横截面尺寸

Fig. 6 Size of variable cross-section pier

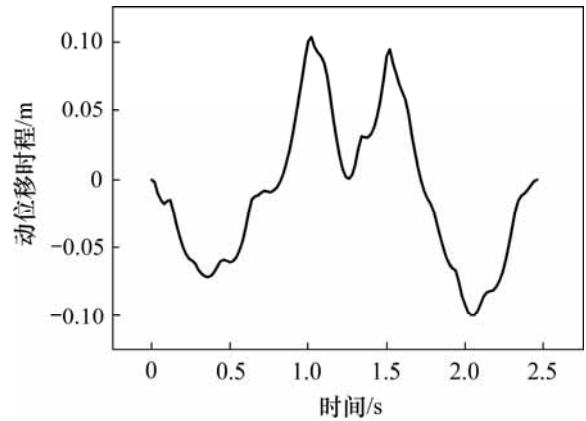
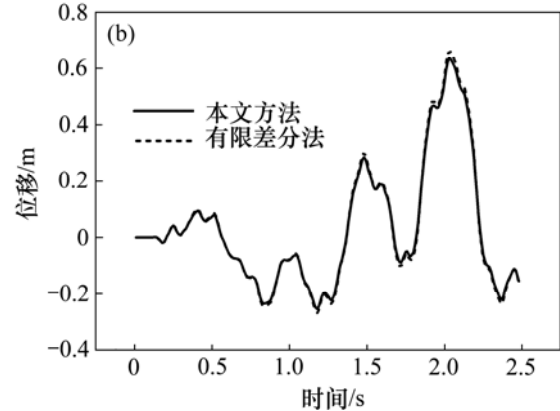
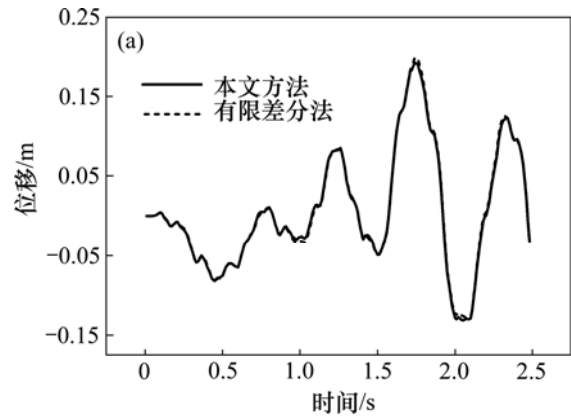


图 7 动位移荷载时程曲线

Fig. 7 Dynamic displacement load time history curve

截面超高桥墩底部输入图 7 所示的强震位移荷载，分析该结构动力响应的竖向时滞效应。

根据结构特性，结合本文方法，编制变截面单元波动分析传递矩阵法的 Matlab 计算程序。为校验本文方法的正确性，同时利用有限差分法对该结构进行地震响应分析。图 8 所示为利用本文方法和有限差分法计算得到的距墩底 x=50 m 和 x=100 m 处结构的位移响应时程曲线。



x/m: (a) 50; (b) 100

图 8 桥墩动力位移响应

Fig. 8 Dynamic displacement response of pier

由图8可知: 本文方法计算结果与有限差分法计算结果吻合较好, 仅有细微差异。计算结果表明本文方法正确, 如对时间和结构离散的足够小, 本文方法为精确解。对比图8(a)和图8(b)可知: $x=50\text{ m}$ 处结构起振时刻为 $t=0.08\text{ s}$, 而 $x=100\text{ m}$ 处结构的起振时刻为 $t=0.15\text{ s}$, 此外对比结构峰值位移出现时刻均能表明结构超高桥墩的振动传递具有时间滞后性。

6 结论

1) 根据经典梁理论, 将变截面杆件等效为阶形变截面杆单元。通过分析阶形变截面单元上、下段及质量集中点处状态向量的传递关系, 建立了变截面单元的传递矩阵算法。结合结构时程分析的时间序列性, 推导了状态向量在离散时间序列的传递矩阵, 得到变截面单元波动分析的传递矩阵法。

2) 利用本文方法能够对变截面高桥墩进行竖向时滞效应计算, 通过与有限差分法计算结果进行对比, 表明本文方法正确。由于本文方法计算中利用了矩阵计算, 易于编程, 可应用于工程实践。

参考文献:

- [1] 廖振鹏. 工程波动理论导论[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2002: 3.
LIAO Zhenpeng. Introduction to engineering wave theory[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2002: 3.
- [2] 张元海, 李乔. 变截面梁的应力计算及其分布规律研究[J]. 工程力学, 2007, 24(3): 78-82.
ZHANG Yuanhai, LI Qiao. Stress calculation and stress distribution analysis of non-uniform beams[J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(3): 78-82.
- [3] 侯祥林, 卢宏峰, 范炜, 等. 变截面承压杆的临界载荷的优化算法研究与应用[J]. 工程力学, 2013, 30(增刊): 6-10.
HOU Xianglin, LU Hongfeng, FAN Wei, et al. Optimization algorithm and application of critical load for variable cross-section compression bar[J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(Suppl): 6-10.
- [4] TODOROVSKA M I, TRIFUNAC M D. Earthquake damage detection in the Imperial County Services Building III: Analysis of wave travel times via impulse response functions[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2008, 28: 387-404.
- [5] ZHANG R R, SNIEDER R, GARGABA L, et al. Modeling of seismic wave motion in high-rise buildings[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2011, 26: 520-527.
- [6] GICEV V, TRIFUNAC M D. Energy and power of nonlinear waves in a seven-story reinforced concrete building[J]. Journal of Earthquake Technology, 2007, 44(1): 305-323.
- [7] 李东升, 贾辉, 李宏男, 等. 论高耸结构地震动响应的时延性[J]. 建筑结构, 2010, 40(增刊2): 119-123.
LI Dongsheng, JIA Hui, LI Hongnan, et al. Discussion on the time delay of earthquake excitation in high-rise building[J]. Building Structure, 2010, 40(Suppl 2): 119-123.
- [8] 刘铁林, 姜迎春, 陈文博. 结构地震响应分析的波动方法[J]. 工程力学, 2012, 29(增刊): 43-56.
LIU Tielin, JIANG Yingchun, CHEN Wenbo. Wave propagation method for seismic response analyses of structures[J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(Sup): 43-56.
- [9] 姜迎春. 结构地震响应波动分析的被研究块体方法[D]. 大连: 大连理工大学土木工程学院, 2013: 14-24.
JIANG Yingchun. Investigated lump method for wave propagation analysis of earthquake response of structure[D]. Dalian: Dalian University of Technology. School of Civil Engineering, 2013: 14-24.
- [10] 孙建鹏, 李青宁. 压杆弹性屈曲分析的精细传递矩阵法[J]. 工程力学, 2011, 28(7): 26-29.
SUN Jianpeng, LI Qingning. Precise transfer matrix method for elastic-buckling[J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(7): 26-29.
- [11] 孙建鹏, 李青宁. 大跨桥梁地震反应的频域精细传递矩阵法[J]. 工程力学, 2010, 27(12): 8-13.
SUN Jianpeng, LI Qingning. Precise transfer matrix method for seismic response analysis of the long-span bridges in frequency domain[J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(12): 8-13.
- [12] 韦成龙, 李斌, 曾庆元. 变截面连续箱梁桥剪力滞及剪切变形双重效应分析的传递矩阵法[J]. 工程力学, 2008, 25(9): 111-117.
WEI Chenglong, LI Bin, ZENG Qingyuan. Transfer matrix method considering both shear lag and shear deformation effects in non-uniform continuous box girder[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(9): 111-117.
- [13] 芮筱亭, 贡来峰, 陆毓琪, 等. 多体系统传递矩阵法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 1-13.
RUI Xiaoting, YUN Laifeng, LU Yuqi, et al. Transfer matrix method of multibody system and its application[M]. Beijing: Science Press, 2008: 1-13.
- [14] 杨海根, 芮筱亭, 刘怡昕, 等. 多体系统传递矩阵法分布式并行计算研究[J]. 振动工程学报, 2014, 27(1): 9-16.
YANG Haigen, RUI Xiaoting, LIU Yixin, et al. Study on distributed parallel computing of transfer matrix method for multi-body systems[J]. Journal of Vibration Engineering, 2014, 27(1): 9-16.
- [15] 邱吉宝, 向树红, 张正平. 计算结构动力学[M]. 北京: 中国科学技术大学出版社, 2009: 166-168.
QIU Jibao, XIANG Shuhong, ZHANG Zhengping. Structural dynamics compute[M]. Beijing: University of Science and Technology of China Press, 2009: 166-168.
- [16] 克拉夫 R W, PENZIEN J. 结构动力学[M]. 王光远, 译. 北京: 高等教育出版社, 2006: 3-5.
CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of structures[M]. WANG Guangyuan, trans. Beijing: Higher Education Press, 2006: 3-5.

(编辑 赵俊)